Conjuntos I

José de Jesús Lavalle Martínez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Estructuras Discretas CCOS 009

Contenido

Motivación I

- En esta sección, estudiamos la estructura discreta fundamental sobre la que se construyen todas las demás estructuras discretas, a saber, el conjunto.

Motivación I

- Los conjuntos se utilizan para agrupar objetos.

Motivación I

- A menudo, pero no siempre, los objetos de un conjunto tienen propiedades similares.

Motivación I

- Por ejemplo, todos los estudiantes que están actualmente matriculados en su escuela forman un conjunto.

Motivación I

- Asimismo, todos los alumnos que actualmente cursan un curso de matemática discreta en cualquier escuela forman un conjunto.

Motivación II

- Además, aquellos estudiantes matriculados en su escuela que están tomando un curso de matemáticas discretas forman un conjunto que se puede obtener tomando los elementos comunes a las dos primeras colecciones.

Motivación II

- El lenguaje de los conjuntos es un medio para estudiar estas colecciones de manera organizada.

Motivación II

- A continuación, proporcionamos una definición de conjunto.

Motivación II

- Esta definición es una definición intuitiva, que no forma parte de una teoría formal de conjuntos.

Definición intuitiva de conjunto

Definición 1

Un conjunto es una colección desordenada de objetos distintos, llamados elementos o miembros del conjunto. Se dice que un conjunto contiene a sus elementos. Escribimos $a \in A$ para denotar que a es un elemento del conjunto A. La notación $a \notin A$ denota que a no es un elemento del conjunto A.

Notación

- Es común que los conjuntos se denoten con letras mayúsculas.

Notación

- Las letras minúsculas se utilizan generalmente para denotar los elementos de los conjuntos.

Notación

- Hay varias formas de describir un conjunto. Una forma es enumerar todos los miembros de un conjunto, cuando sea posible.

Notación

- Usamos una notación en la que todos los miembros del conjunto se enumeran entre llaves. Por ejemplo, la notación $\{a, b, c, d\}$ representa el conjunto con los cuatro elementos a, b, c y d.

Notación

- Esta forma de describir un conjunto se conoce como **método de lista**.

Ejemplos 1, 2 y 3

Ejemplo 1

El conjunto V de todas las vocales del alfabeto Inglés se puede escribir como $V = \{a, e, i, o, u\}$. $\square$

Ejemplo 2

El conjunto O de todos los enteros positivos impares menores que 10 se puede escribir como $O = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. $\square$

Ejemplos 1, 2 y 3

Ejemplo 3

Aunque los conjuntos se utilizan generalmente para agrupar elementos con propiedades comunes, no hay nada que impida que un conjunto tenga elementos aparentemente no relacionados. Por ejemplo, el conjunto que contiene los cuatro elementos $a, 2$, Fred y New Jersey se puede denotar por $\{a, 2, \text{Fred}, \text{New Jersey}\}$.$\square$

Abreviación

- A veces, el método de lista se utiliza para describir un conjunto sin enumerar a todos sus miembros.

Abreviación

- Se enumeran algunos miembros del conjunto, y luego se utilizan puntos suspensivos (...) cuando el patrón general de los elementos es obvio.

Abreviación

Ejemplo 4

El conjunto de los enteros positivos menores que 100 puede ser denotado por $\{1, 2, 3, ..., 99\}$. $\square$

Constructor de conjuntos

- Otra forma de describir un conjunto es utilizar la notación de **constructor de conjuntos**.

Constructor de conjuntos

- Caracterizamos todos aquellos elementos del conjunto indicando la propiedad o propiedades que deben tener para ser miembros.

- La forma general de esta notación es $\{x|x \text{ tiene la propiedad } P\}$ y se lee "el conjunto de todo x tal que x tiene la propiedad P".

- Por ejemplo, el conjunto O de todos los enteros positivos impares menores que 10 se puede escribir como

$$O = \{x | x \text{ es un entero positivo impar menor que } 10\},$$

o, especificando el universo como el conjunto de todos los enteros positivos, como

$$O = \{x \in \mathbb{Z}^+ | x \text{ es impar y } x < 10\}.$$

- A menudo usamos este tipo de notación para describir conjuntos cuando es imposible enumerar todos los elementos del conjunto. Por ejemplo, el conjunto $\mathbb{Q}^+$ de todos los números racionales positivos se puede escribir como

$$\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x = \frac{p}{q}, \text{ para enteros positivos } p \text{ y } q\}.$$

Conjuntos importantes en Matemáticas Discretas

Estos conjuntos juegan un papel importante en las matemáticas discretas:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, el conjunto de todos los **números naturales**,

Conjuntos importantes en Matemáticas Discretas

Estos conjuntos juegan un papel importante en las matemáticas discretas:

- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, el conjunto de todos los **números enteros**,

Conjuntos importantes en Matemáticas Discretas

Estos conjuntos juegan un papel importante en las matemáticas discretas:

- $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$, el conjunto de todos los **enteros positivos**,

Conjuntos importantes en Matemáticas Discretas

Estos conjuntos juegan un papel importante en las matemáticas discretas:

- $\mathbb{Q} = \{p/q | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0\}$, el conjunto de todos los **números racionales**,

Conjuntos importantes en Matemáticas Discretas

Estos conjuntos juegan un papel importante en las matemáticas discretas:

- $\mathbb{R}$, el conjunto de todos los **números reales**, Estos conjuntos juegan un papel importante en las matemáticas discretas:

- $\mathbb{R}^{+}$, el conjunto de todos los números **reales positivos**,

Conjuntos importantes en Matemáticas Discretas

Estos conjuntos juegan un papel importante en las matemáticas discretas:

- $\mathbb{C}$, el conjunto de todos los **números complejos**.

Intervalos

- Entre los conjuntos estudiados en cálculo y otras materias se encuentran los intervalos, conjuntos de todos los números reales entre dos números a y b, con o sin a y b.

Intervalos

- Si a y b son números reales con $a \leq b$, denotamos estos intervalos por

$$
\begin{aligned}
[a, b] &= \{x | a \leq x \leq b\}, \\
[a, b) &= \{x | a \leq x < b\}, \\
(a, b] &= \{x | a < x \leq b\}, \\
(a, b) &= \{x | a < x < b\}.
\end{aligned}
$$

Intervalos

- Tenga en cuenta que $[a, b]$ se denomina **intervalo cerrado** de a a b y (a, b) se denomina **intervalo abierto** de a a b.

Intervalos

- Cada uno de los intervalos $[a, b], [a, b), (a, b]$ y (a, b) contiene todos los números reales estrictamente entre a y b.

Intervalos

- Cada uno de los intervalos $[a,b], [a,b), (a,b]$ y (a,b) contiene todos los números reales estrictamente entre a y b.
- Los dos primeros contienen a a y el primero y tercero contienen a b.

Ejemplo 5

Los conjuntos pueden tener otros conjuntos como miembros, como lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5

Ejemplo 5

El conjunto $\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ es un conjunto que contiene cuatro elementos, cada uno de los cuales es un conjunto. Los cuatro elementos de este conjunto son $\mathbb{N}$, el conjunto de números naturales; $\mathbb{Z}$, el conjunto de números enteros; $\mathbb{Q}$, el conjunto de números racionales; y $\mathbb{R}$, el conjunto de números reales. $\square$

Observación 1

- Tenga en cuenta que el concepto de tipo de datos, o tipo, en ciencias de la computación se basa en el concepto de conjunto.

Observación

Observación 1

- En particular, un tipo de datos o tipo es el nombre de un conjunto, junto con un conjunto de operaciones que se pueden realizar sobre objetos de ese conjunto.

Observación

Observación 1

- Por ejemplo, *boolean* es el nombre del conjunto $\{0, 1\}$, junto con los operadores sobre uno o más elementos de este conjunto, tales como **AND, OR** y **NOT**.

Igualdad de conjuntos

Debido a que muchos enunciados matemáticos afirman que dos colecciones de objetos especificadas de manera diferente son en realidad el mismo conjunto, debemos comprender qué significa que dos conjuntos sean iguales.

Igualdad de conjuntos

Definición 2

Dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos. Por lo tanto, si A y B son conjuntos, entonces A y B son iguales si y sólo si $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$. Escribimos $A = B$ si A y B son conjuntos iguales.

Ejemplo 6

Ejemplo 6

Los conjuntos $\{1, 3, 5\}$ y $\{3, 5, 1\}$ son iguales porque tienen los mismos elementos. Tenga en cuenta que el orden en el que se enumeran los elementos de un conjunto no importa. Tenga en cuenta también que no importa si un elemento de un conjunto aparece más de una vez, por lo que $\{1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5\}$ es lo mismo que el conjunto $\{1, 3, 5\}$ porque tienen los mismos elementos. $\square$

Conjunto vacío

- Hay un conjunto especial que no tiene elementos. Este conjunto se llama **conjunto vacío**, o **conjunto nulo**, y se denota por $\emptyset$.

Conjunto vacío

- El conjunto vacío también se puede denotar por $\{\}$ (es decir, representamos el conjunto vacío con un par de llaves que encierran todos los elementos de este conjunto).

Conjunto vacío

- A menudo, un conjunto de elementos con determinadas propiedades resulta ser el conjunto nulo.

Conjunto vacío

- Por ejemplo, el conjunto de todos los enteros positivos que son mayores que sus cuadrados es el conjunto nulo.

Conjunto singleton

- Un conjunto con un elemento se llama **conjunto singleton**.

Conjunto singleton

- Un error común es confundir el conjunto vacío $\emptyset$ con el conjunto $\{\emptyset\}$, que es un conjunto singleton. ¡El único elemento del conjunto $\{\emptyset\}$ es el conjunto vacío mismo!

Conjunto singleton

- Una analogía útil para recordar esta diferencia es pensar en carpetas en un sistema de archivos de computadora.

Conjunto singleton

- El conjunto vacío se puede considerar como una carpeta vacía y el conjunto que consiste sólo en el conjunto vacío se puede considerar como una carpeta con exactamente una carpeta dentro, es decir, la carpeta vacía.

- Tenga en cuenta que el término objeto se ha utilizado en la definición de un conjunto, Definición 1, sin especificar qué es un objeto.

Teoría de conjuntos ingenua I

- Esta descripción de un conjunto como una colección de objetos, basada en la noción intuitiva de un objeto, fue establecida por primera vez en 1895 por el matemático alemán Georg Cantor.

- La teoría que resulta de esta definición intuitiva de un conjunto, y el uso de la noción intuitiva de que para cualquier propiedad, hay un conjunto que consiste exactamente en los objetos con esta propiedad, conduce a paradojas o inconsistencias lógicas.

- Esto fue demostrado por el filósofo inglés Bertrand Russell en 1902.

Teoría de conjuntos ingenua II

- Estas inconsistencias lógicas se pueden evitar construyendo la teoría de conjuntos comenzando con axiomas.

- Sin embargo, usaremos la versión original de Cantor de la teoría de conjuntos, conocida como teoría de conjuntos ingenua, en este libro porque todos los conjuntos considerados en este libro pueden tratarse de manera consistente usando la teoría original de Cantor.

Teoría de conjuntos ingenua II

- Los estudiantes encontrarán útil la familiaridad con la teoría de conjuntos ingenua si continúan aprendiendo sobre la teoría de conjuntos axiomática.

Teoría de conjuntos ingenua II

- También encontrarán el desarrollo de la teoría de conjuntos axiomáticos mucho más abstracto que el material de este texto.

Diagramas de Venn I

- Los conjuntos se pueden representar gráficamente mediante diagramas de Venn, que llevan el nombre del matemático inglés John Venn, quien introdujo su uso en 1881.

Diagramas de Venn I

- En los diagramas de Venn, el conjunto universal U, que contiene todos los objetos considerados, se representa mediante un rectángulo. (Tenga en cuenta que el conjunto universal varía según los objetos de interés.)

- Dentro de este rectángulo, se utilizan círculos u otras figuras geométricas para representar conjuntos.

Diagramas de Venn I

- A veces, los puntos se utilizan para representar los elementos particulares del conjunto.

Diagramas de Venn I

- Los diagramas de Venn se utilizan a menudo para indicar las relaciones entre conjuntos.

Diagramas de Venn I

- Mostramos cómo se puede usar un diagrama de Venn en el Ejemplo 7.

Ejemplo 7

Dibuje un diagrama de Venn que represente a V, el conjunto de las vocales del alfabeto Inglés.

Solución: Dibujamos un rectángulo para indicar el conjunto universal U, que es el conjunto de las 26 letras del alfabeto Inglés. Dentro de este rectángulo dibujamos un círculo para representar a V. Dentro de este círculo indicamos los elementos de V con puntos (ver Figura 1). □

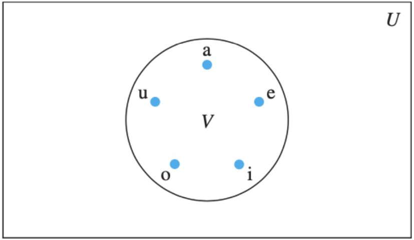

Figura 1: Diagrama de Venn para el conjunto de vocales.

Definición de subconjuto I

- Es común encontrar situaciones en las que los elementos de un conjunto también son elementos de un segundo conjunto.

Definición de subconjuto I

- Introducimos ahora algo de terminología y notación para expresar tales relaciones entre conjuntos.

Definición de subconjuto I

Definición 3

El conjunto A es un subconjunto de B, y B es un superconjunto de A, si y solo si cada elemento de A es también un elemento de B. Usamos la notación $A \subseteq B$ para indicar que A es un subconjunto del conjunto B. Si, en cambio, queremos enfatizar que B es un superconjunto de A, usamos la notación equivalente $B \supseteq A$. (Entonces, $A \subseteq B$ y $B \supseteq A$ son declaraciones equivalentes).

Definición de subconjuto II

- Vemos que $A \subseteq B$ si y sólo si la cuantificación

$$\forall x(x \in A \to x \in B)$$

es verdadera.

Definición de subconjuto II

- Vemos que $A \subseteq B$ si y sólo si la cuantificación

$$\forall x(x \in A \to x \in B)$$

  es verdadera.
- Tenga en cuenta que para mostrar que A no es un subconjunto de B, solo necesitamos encontrar un elemento $x \in A$ con $x \notin B$.

Definición de subconjuto II

- Vemos que $A \subseteq B$ si y sólo si la cuantificación

$$\forall x(x \in A \to x \in B)$$

  es verdadera.
- Tenga en cuenta que para mostrar que A no es un subconjunto de B, solo necesitamos encontrar un elemento $x \in A$ con $x \notin B$.
- Tal x es un contraejemplo de la afirmación de que $x \in A$ implica $x \in B$.

- Tenemos estas reglas útiles para determinar si un conjunto es un subconjunto de otro:

Demostrar que A es un subconjunto de B Para demostrar que $A \subseteq B$, demuestre que si x pertenece a A, entonces x también pertenece a B.

Demostrar que A no es un subconjunto de B Para demostrar que $A \nsubseteq B$, encuentre una sola $x \in A$ tal que $x \notin B$.

Ejemplo 8 I

Ejemplo 8

Considere lo siguiente:

Ejemplo 8

Considere lo siguiente:

- El conjunto de todos los números enteros positivos impares menores que 10 es un subconjunto del conjunto de todos los números enteros positivos menores que 10,

Ejemplo 8 I

Ejemplo 8

Considere lo siguiente:

- El conjunto de todos los números enteros positivos impares menores que 10 es un subconjunto del conjunto de todos los números enteros positivos menores que 10,
- el conjunto de números racionales es un subconjunto del conjunto de números reales,

Ejemplo 8

Considere lo siguiente:

- El conjunto de todos los números enteros positivos impares menores que 10 es un subconjunto del conjunto de todos los números enteros positivos menores que 10,
- el conjunto de números racionales es un subconjunto del conjunto de números reales,
- el conjunto de todos los estudiantes de computación en su universidad es un subconjunto del conjunto de todos los estudiantes de su universidad

Ejemplo 8 II

- y el conjunto de todas las personas en China es un subconjunto del conjunto de todas las personas en China (es decir, es un subconjunto de sí mismo).

Ejemplo 8 II

- Cada uno de estos hechos se sigue inmediatamente al señalar que un elemento que pertenece al primer conjunto, en cada par de conjuntos, también pertenece al segundo conjunto en ese par. $\square$

Ejemplo 9

Ejemplo 9

- El conjunto de enteros con cuadrados menores que 100 no es un subconjunto del conjunto de enteros no negativos porque -1 está en el primer conjunto (ya que $(-1)^2 < 100$), pero no en el último conjunto.

Ejemplo 9

- El conjunto de personas que han cursado matemáticas discretas en su universidad no es un subconjunto del conjunto de todas las personas que cursan computación si hay al menos un estudiante que ha cursado matemáticas discretas que no es estudiante de computación. □

Teorema 1

Para todo conjunto S, $\emptyset \subseteq S$ y $S \subseteq S$.

Teorema 1 I

Teorema 1

Para todo conjunto S, $\emptyset \subseteq S$ y $S \subseteq S$.

Demostración:

Teorema 1 I

Teorema 1

Para todo conjunto S, $\emptyset \subseteq S$ y $S \subseteq S$.

Demostración:

- Primero demostramos que $\emptyset \subseteq S$.

Teorema 1

Para todo conjunto S, $\emptyset \subseteq S$ y $S \subseteq S$.

Demostración:

- Primero demostramos que $\emptyset \subseteq S$.
- Sea S un conjunto. Para demostrar que $\emptyset \subseteq S$, debemos demostrar que $\forall x(x \in \emptyset \to x \in S)$ es verdadera.

Teorema 1

Para todo conjunto S, $\emptyset \subseteq S$ y $S \subseteq S$.

Demostración:

- Primero demostramos que $\emptyset \subseteq S$.
- Sea S un conjunto. Para demostrar que $\emptyset \subseteq S$, debemos demostrar que $\forall x(x \in \emptyset \to x \in S)$ es verdadera.
- Dado que el conjunto vacío no contiene elementos, se deduce que $x \in \emptyset$ siempre es falso.

Teorema 1

Para todo conjunto S, $\emptyset \subseteq S$ y $S \subseteq S$.

Demostración:

- Primero demostramos que $\emptyset \subseteq S$.
- Sea S un conjunto. Para demostrar que $\emptyset \subseteq S$, debemos demostrar que $\forall x(x \in \emptyset \rightarrow x \in S)$ es verdadera.
- Dado que el conjunto vacío no contiene elementos, se deduce que $x \in \emptyset$ siempre es falso.
- De ello se deduce que el enunciado condicional $x \in \emptyset \rightarrow x \in S$ es siempre verdadero, porque su hipótesis siempre es falsa y un enunciado condicional con una hipótesis falsa es verdadero.

Teorema 1

Para todo conjunto S, $\emptyset \subseteq S$ y $S \subseteq S$.

Demostración:

- Primero demostramos que $\emptyset \subseteq S$.
- Sea S un conjunto. Para demostrar que $\emptyset \subseteq S$, debemos demostrar que $\forall x(x \in \emptyset \to x \in S)$ es verdadera.
- Dado que el conjunto vacío no contiene elementos, se deduce que $x \in \emptyset$ siempre es falso.
- De ello se deduce que el enunciado condicional $x \in \emptyset \to x \in S$ es siempre verdadero, porque su hipótesis siempre es falsa y un enunciado condicional con una hipótesis falsa es verdadero.
- Por lo tanto, $\forall x(x \in \emptyset \to x \in S)$ es verdadera.

Teorema 1 II

- Esto completa la prueba.

Teorema 1 II

- Esto completa la prueba.
- Tenga en cuenta que este es un ejemplo de una prueba por vacuidad.

- Esto completa la prueba.
- Tenga en cuenta que este es un ejemplo de una prueba por vacuidad.
- Para demostrar que $S \subseteq S$ tenemos que ver si $\forall x(x \in S \rightarrow x \in S)$ es verdadera,

Teorema 1 II

- Esto completa la prueba.
- Tenga en cuenta que este es un ejemplo de una prueba por vacuidad.
- Para demostrar que $S \subseteq S$ tenemos que ver si $\forall x(x \in S \to x \in S)$ es verdadera,
- lo cual se cumple ya que cualquier enunciado siempre se implica a sí mismo,

Teorema 1 II

- Esto completa la prueba.
- Tenga en cuenta que este es un ejemplo de una prueba por vacuidad.
- Para demostrar que $S \subseteq S$ tenemos que ver si $\forall x(x \in S \to x \in S)$ es verdadera,
- lo cual se cumple ya que cualquier enunciado siempre se implica a sí mismo,
- en este caso $x \in S \to x \in S$ es verdadero y como escogimos un $x \in S$ arbitrario entonces $S \subseteq S$ es cierto.

Teorema 1 III

- También podemos demostrar el Teorema 1 por contradicción, de la siguiente manera.

Teorema 1 III

- También podemos demostrar el Teorema 1 por contradicción, de la siguiente manera.
- Para demostrar que $\emptyset \subseteq S$, empezamos suponiendo que la afirmación es falsa.

Teorema 1 III

- También podemos demostrar el Teorema 1 por contradicción, de la siguiente manera.
- Para demostrar que $\emptyset \subseteq S$, empezamos suponiendo que la afirmación es falsa.
- Así, tenemos que $\forall x(x \in \emptyset \rightarrow x \in S)$, lo cual implica que $x \in \emptyset$ es verdadera y $x \in S$ es falsa; pero como $\emptyset$ por definición no tiene elementos, llegamos a una contradicción.

Teorema 1 III

- También podemos demostrar el Teorema 1 por contradicción, de la siguiente manera.
- Para demostrar que $\emptyset \subseteq S$, empezamos suponiendo que la afirmación es falsa.
- Así, tenemos que $\forall x(x \in \emptyset \to x \in S)$, lo cual implica que $x \in \emptyset$ es verdadera y $x \in S$ es falsa; pero como $\emptyset$ por definición no tiene elementos, llegamos a una contradicción.
- Por lo tanto es falsa nuestra suposición de que $\emptyset \subseteq S$ es falsa, así $\emptyset \subseteq S$ es verdadera.

Teorema 1 III

- También podemos demostrar el Teorema 1 por contradicción, de la siguiente manera.
- Para demostrar que $\emptyset \subseteq S$, empezamos suponiendo que la afirmación es falsa.
- Así, tenemos que $\forall x(x \in \emptyset \to x \in S)$, lo cual implica que $x \in \emptyset$ es verdadera y $x \in S$ es falsa; pero como $\emptyset$ por definición no tiene elementos, llegamos a una contradicción.
- Por lo tanto es falsa nuestra suposición de que $\emptyset \subseteq S$ es falsa, así $\emptyset \subseteq S$ es verdadera.
- De la misma manera para demostrar por contradicción que $S \subseteq S$, empezamos suponiendo que la afirmación $\forall x(x \in S \to x \in S)$ es falsa.

Teorema 1 III

- También podemos demostrar el Teorema 1 por contradicción, de la siguiente manera.
- Para demostrar que $\emptyset \subseteq S$, empezamos suponiendo que la afirmación es falsa.
- Así, tenemos que $\forall x(x \in \emptyset \to x \in S)$, lo cual implica que $x \in \emptyset$ es verdadera y $x \in S$ es falsa; pero como $\emptyset$ por definición no tiene elementos, llegamos a una contradicción.
- Por lo tanto es falsa nuestra suposición de que $\emptyset \subseteq S$ es falsa, así $\emptyset \subseteq S$ es verdadera.
- De la misma manera para demostrar por contradicción que $S \subseteq S$, empezamos suponiendo que la afirmación $\forall x(x \in S \to x \in S)$ es falsa.
- Por lo tanto debemos tener que $x \in S \to x \in S$ es falsa,

- También podemos demostrar el Teorema 1 por contradicción, de la siguiente manera.
- Para demostrar que $\emptyset \subseteq S$, empezamos suponiendo que la afirmación es falsa.
- Así, tenemos que $\forall x(x \in \emptyset \rightarrow x \in S)$, lo cual implica que $x \in \emptyset$ es verdadera y $x \in S$ es falsa; pero como $\emptyset$ por definición no tiene elementos, llegamos a una contradicción.
- Por lo tanto es falsa nuestra suposición de que $\emptyset \subseteq S$ es falsa, así $\emptyset \subseteq S$ es verdadera.
- De la misma manera para demostrar por contradicción que $S \subseteq S$, empezamos suponiendo que la afirmación $\forall x(x \in S \rightarrow x \in S)$ es falsa.
- Por lo tanto debemos tener que $x \in S \rightarrow x \in S$ es falsa,
- lo cual implica que $x \in S$ es al mismo tiempo verdadera y falsa, lo cual es una contradicción, de esta manera $S \subseteq S$ es verdadera. $\blacksquare$

Subconjunto propio I

- Cuando deseamos enfatizar que un conjunto A es un subconjunto de un conjunto B pero que $A \neq B$, escribimos $A \subset B$ y decimos que A es un **subconjunto propio** de B.

Subconjunto propio I

- Para que $A \subset B$ sea verdadero, debe ser el caso de que $A \subseteq B$ y debe existir un elemento x de B que no es un elemento de A.

Subconjunto propio I

- Es decir, A es un subconjunto propio de B si y sólo si

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists(x \in B \wedge x \notin A)$$

es verdadera.

- Los diagramas de Venn se pueden utilizar para ilustrar que un conjunto A es un subconjunto de un conjunto B.
- Dibujamos el conjunto universal U como un rectángulo. Dentro de este rectángulo dibujamos un círculo para B.
- Debido a que A es un subconjunto de B, dibujamos el círculo para A dentro del círculo para B. Esta relación se muestra en la Figura 2.

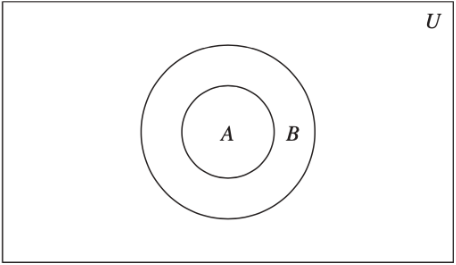

Figura 2: Diagrama de Venn que muestra que A es un subconjunto de B.

Igualdad de conjuntos I

- Recuerde de la Definición 2 que los conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.

Igualdad de conjuntos I

- Una forma útil de mostrar que dos conjuntos tienen los mismos elementos es mostrar que cada conjunto es un subconjunto del otro.

Igualdad de conjuntos I

- En otras palabras, podemos demostrar que si A y B son conjuntos con $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $A = B$.

- Es decir, $A = B$ si y sólo si $\forall x(x \in A \to x \in B)$ y $\forall x(x \in B \to x \in A)$ o equivalentemente si y sólo si $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$, que es lo que significa que A y B sean iguales.

Igualdad de conjuntos II

- Debido a que este método de mostrar que dos conjuntos son iguales es tan útil, lo resaltamos aquí.

Igualdad de conjuntos II

- *Demostrar que dos conjuntos son iguales* Para demostrar que dos conjuntos A y B son iguales, muestre que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Igualdad de conjuntos II

- Los conjuntos pueden tener otros conjuntos como miembros.

Igualdad de conjuntos II

- Por ejemplo, tenemos los conjuntos

$$A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \text{ y}$$

$$B = \{x | x \text{ es un subconjunto del conjunto } \{a, b\}\}.$$

Igualdad de conjuntos II

- Por ejemplo, tenemos los conjuntos

$$A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \text{ y}$$

$$B = \{x | x \text{ es un subconjunto del conjunto } \{a, b\}\}.$$

- Tenga en cuenta que estos dos conjuntos son iguales, es decir, $A = B$. También tenga en cuenta que $\{a\} \in A$, pero $a \notin A$.

Tamaño de un conjunto I

Los conjuntos se utilizan ampliamente en los problemas de conteo, y para tales aplicaciones necesitamos discutir los tamaños de los conjuntos.

Tamaño de un conjunto I

Definición 4

Sea S un conjunto. Si hay exactamente n elementos distintos en S donde n es un número entero no negativo, decimos que S es un conjunto finito y que n es la cardinalidad de S. La cardinalidad de S se denota por $|S|$.

Tamaño de un conjunto I

Observación 2

El término cardinalidad proviene del uso común del término número cardinal como el tamaño de un conjunto finito.

Tamaño de un conjunto II

Ejemplo 10

Sea A el conjunto de números enteros positivos impares menores que 10. Entonces $|A| = 5$. $\square$

Tamaño de un conjunto II

Ejemplo 11

Sea S el conjunto de letras del alfabeto Inglés. Entonces $|S| = 26$. $\square$

Tamaño de un conjunto II

Ejemplo 12

Como el conjunto vacío (nulo) no tiene elementos, se sigue que $|\emptyset| = 0$. $\square$

Conjuntos infinitos

También nos interesarán conjuntos que no sean finitos.

Definición 5

Se dice que un conjunto es infinito si no es finito.

Conjuntos infinitos

Ejemplo 13

El conjunto de enteros positivos es infinito. □

Conjunto potencia I

- Muchos problemas implican probar todas las combinaciones de elementos de un conjunto para ver si satisfacen alguna propiedad.

Conjunto potencia I

- Para considerar todas estas combinaciones de elementos de un conjunto S, construimos un nuevo conjunto que tiene como miembros todos los subconjuntos de S.

Definición 6

Dado un conjunto S, el **conjunto potencia** de S es el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto S. El conjunto potencia de S se denota por $\mathcal{P}(S)$.

Ejemplo 14

¿Cuál es el conjunto potencia del conjunto $\{0, 1, 2\}$?
Solución: El conjunto potencia $\mathcal{P}(\{0, 1, 2\})$ es el conjunto de todos los subconjuntos de $\{0, 1, 2\}$. Por lo tanto,

$$\mathcal{P}(\{0, 1, 2\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}.$$

Tenga en cuenta que el conjunto vacío y el conjunto en sí son miembros de este conjunto de subconjuntos. □

Conjunto potencia III

Ejemplo 15

¿Cuál es el conjunto potencia del conjunto vacío? ¿Cuál es el conjunto potencia del conjunto $\{\emptyset\}$?

Solución: El conjunto vacío tiene exactamente un subconjunto, a saber, él mismo. Por consiguiente, $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

El conjunto $\{\emptyset\}$ tiene exactamente dos subconjuntos, a saber, $\emptyset$ y el propio conjunto $\{\emptyset\}$. Por lo tanto, $\mathcal{P} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. $\square$

Conjunto potencia III

Ejemplo 15

¿Cuál es el conjunto potencia del conjunto vacío? ¿Cuál es el conjunto potencia del conjunto $\{\emptyset\}$?

Solución: El conjunto vacío tiene exactamente un subconjunto, a saber, él mismo. Por consiguiente, $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

El conjunto $\{\emptyset\}$ tiene exactamente dos subconjuntos, a saber, $\emptyset$ y el propio conjunto $\{\emptyset\}$. Por lo tanto, $\mathcal{P} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. $\square$

Si un conjunto tiene n elementos, entonces su conjunto potencia tiene 2^n elementos. Demostraremos este hecho de varias formas en secciones posteriores del texto.

Producto cartesiano I

- El orden de los elementos de una colección suele ser importante.

Producto cartesiano I

- Debido a que los conjuntos no están ordenados, se necesita una estructura diferente para representar colecciones ordenadas.

- Esto es proporcionado por $n-$**tuplas ordenadas**.

Definición 7

La $n-$tupla ordenada $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es la colección ordenada que tiene a_1 como primer elemento, a_2 como segundo elemento, $\ldots$, y a_n como $n-$ésimo elemento.

Producto cartesiano II

- Decimos que dos $n-$tuplas ordenadas son iguales si y solo si cada par correspondiente de sus elementos es igual.

Producto cartesiano II

- En otras palabras, $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ si y sólo si $a_i = b_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

- En particular, las $2-$tuplas ordenadas se denominan **pares ordenados**. Los pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales y sólo si $a = c$ y $b = d$.

Producto cartesiano II

- Observe que (a, b) y (b, a) no son iguales a menos que $a = b$.

Producto cartesiano II

- Muchas de las estructuras discretas que estudiaremos en capítulos posteriores se basan en la noción del producto cartesiano de conjuntos (llamado así por René Descartes).

Producto cartesiano II

- Primero definimos el producto cartesiano de dos conjuntos.

Producto cartesiano III

Definición 8

Sean A y B conjuntos. El **producto cartesiano** de A y B, denotado por $A \times B$, es el conjunto de todos los pares ordenados (a, b), donde $a \in A$ y $b \in B$. Por lo tanto,

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}.$$

Producto cartesiano IV

Ejemplo 16

Sea A el conjunto de todos los estudiantes de una universidad y B el conjunto de todos los cursos ofrecidos en la universidad. ¿Qué es el producto cartesiano $A \times B$ y cómo se puede utilizar?

Producto cartesiano IV

Ejemplo 16

Sea A el conjunto de todos los estudiantes de una universidad y B el conjunto de todos los cursos ofrecidos en la universidad. ¿Qué es el producto cartesiano $A \times B$ y cómo se puede utilizar?

Solución:

$\square$

Ejemplo 16

Sea A el conjunto de todos los estudiantes de una universidad y B el conjunto de todos los cursos ofrecidos en la universidad. ¿Qué es el producto cartesiano $A \times B$ y cómo se puede utilizar?

Solución:

- El producto cartesiano $A \times B$ consta de todos los pares ordenados de la forma (a, b), donde a es un estudiante en la universidad y b es un curso ofrecido en la universidad.

$\square$

Producto cartesiano IV

Ejemplo 16

Sea A el conjunto de todos los estudiantes de una universidad y B el conjunto de todos los cursos ofrecidos en la universidad. ¿Qué es el producto cartesiano $A \times B$ y cómo se puede utilizar?

Solución:

- El producto cartesiano $A \times B$ consta de todos los pares ordenados de la forma (a, b), donde a es un estudiante en la universidad y b es un curso ofrecido en la universidad.
- Una forma de utilizar el conjunto $A \times B$ es representar todas las posibles inscripciones de estudiantes en los cursos de la universidad.

□

Producto cartesiano IV

Ejemplo 16

Sea A el conjunto de todos los estudiantes de una universidad y B el conjunto de todos los cursos ofrecidos en la universidad. ¿Qué es el producto cartesiano $A \times B$ y cómo se puede utilizar?

Solución:

- El producto cartesiano $A \times B$ consta de todos los pares ordenados de la forma (a, b), donde a es un estudiante en la universidad y b es un curso ofrecido en la universidad.
- Una forma de utilizar el conjunto $A \times B$ es representar todas las posibles inscripciones de estudiantes en los cursos de la universidad.
- Además, observe que cada subconjunto de $A \times B$ representa una posible configuración de inscripción total, y $\mathcal{P}(A \times B)$ representa todas las configuraciones posibles de inscripción.

□

Ejemplo 17

¿Cuál es el producto cartesiano de $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a, b, c\}$?
Solución: El producto cartesiano $A \times B$ es

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}.$$

$\square$

Producto cartesiano VI

- Tenga en cuenta que los productos cartesianos $A \times B$ y $B \times A$ no son iguales a menos que $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$ (por lo tanto $A \times B = \emptyset$) o $A = B$.

Producto cartesiano VI

- Tenga en cuenta que los productos cartesianos $A \times B$ y $B \times A$ no son iguales a menos que $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$ (por lo tanto $A \times B = \emptyset$) o $A = B$.
- Esto se ilustra en el Ejemplo 18.

Producto cartesiano VI

- Tenga en cuenta que los productos cartesianos $A \times B$ y $B \times A$ no son iguales a menos que $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$ (por lo tanto $A \times B = \emptyset$) o $A = B$.
- Esto se ilustra en el Ejemplo 18.

Ejemplo 18

Demuestre que el producto cartesiano $B \times A$ no es igual al producto cartesiano $A \times B$, donde A y B son como en el Ejemplo 17.
Solución: El producto cartesiano $B \times A$ es

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}.$$

Esto no es igual al $A \times B$ que se encontró en el Ejemplo 17. $\square$

Producto cartesiano VII

También se puede definir el producto cartesiano de más de dos conjuntos.

Producto cartesiano VII

Definición 9

El **producto cartesiano** de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, denotado por $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, es el conjunto de $n-$tuplas ordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, donde a_i pertenece a A_i para $i = 1, 2, \ldots, n$. En otras palabras,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Producto cartesiano VIII

Ejemplo 19

¿Cuál es el producto cartesiano $A \times B \times C$, donde $A = \{0, 1\}, B = \{1, 2\}$ y $C = \{0, 1, 2\}$? *Solución:* El producto cartesiano $A \times B \times C$ consta de todos los triples ordenados (a, b, c), donde $a \in A, b \in B$ y $c \in C$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A \times B \times C = \{&(0,1,0),(0,1,1),(0,1,2),(0,2,0),(0,2,1),(0,2,2),\\ &(1,1,0),(1,1,1),(1,1,2),(1,2,0),(1,2,1),(1,2,2)\}. \end{aligned}$$

$\square$

Producto cartesiano VIII

Observación 3

Tenga en cuenta que cuando A, B y C son conjuntos, $(A \times B) \times C$ no es lo mismo que $A \times B \times C$.

Producto cartesiano IX

- Usamos la notación A^2 para denotar $A \times A$, el producto cartesiano del conjunto A consigo mismo.

Producto cartesiano IX

- De manera similar, $A^3 = A \times A \times A$, $A^4 = A \times A \times A \times A$, y así sucesivamente.

Producto cartesiano IX

- Más generalmente,

$$A^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Producto cartesiano IX

Ejemplo 20

Suponga que $A = \{1, 2\}$. Se sigue que

$$A^2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\} \text{ y}$$
$$A^3 = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(1,2,2),(2,1,1),(2,1,2),(2,2,1),(2,2,2)\}.$$

$\square$

Relación I

- Un subconjunto R del producto cartesiano $(A \times B)$ se denomina una **relación** del conjunto A con el conjunto B.

Relación I

- Un subconjunto R del producto cartesiano $(A \times B)$ se denomina una **relación** del conjunto A con el conjunto B.
- Los elementos de R son pares ordenados, donde el primer elemento pertenece a A y el segundo a B.

Relación I

- Un subconjunto R del producto cartesiano $(A \times B)$ se denomina una **relación** del conjunto A con el conjunto B.
- Los elementos de R son pares ordenados, donde el primer elemento pertenece a A y el segundo a B.
- Por ejemplo, $R = \{(a,0),(a,1),(a,3),(b,1),(b,2),(c,0),(c,3)\}$ es una relación del conjunto $\{a,b,c\}$ con el conjunto $\{0,1,2,3\}$, y también es una relación del conjunto $\{a,b,c,d,e\}$ con el conjunto $\{0,1,2,3,4\}$.

Relación I

- Un subconjunto R del producto cartesiano $(A \times B)$ se denomina una **relación** del conjunto A con el conjunto B.
- Los elementos de R son pares ordenados, donde el primer elemento pertenece a A y el segundo a B.
- Por ejemplo, $R = \{(a,0),(a,1),(a,3),(b,1),(b,2),(c,0),(c,3)\}$ es una relación del conjunto $\{a,b,c\}$ con el conjunto $\{0,1,2,3\}$, y también es una relación del conjunto $\{a,b,c,d,e\}$ con el conjunto $\{0,1,2,3,4\}$.
- Esto ilustra que una relación no necesita contener un par (x,y) para cada elemento x de A y y de B.

Relación II

Una relación de un conjunto A consigo mismo se llama una relación sobre A.

Ejemplo 21

¿Cuáles son los pares ordenados en la relación menor o igual a, que contiene (a, b) si $a \leq b$, sobre el conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$?

Ejemplo 21

¿Cuáles son los pares ordenados en la relación menor o igual a, que contiene (a, b) si $a \leq b$, sobre el conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$?

Solución:

Ejemplo 21

¿Cuáles son los pares ordenados en la relación menor o igual a, que contiene (a, b) si $a \leq b$, sobre el conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$?

Solución:

- El par ordenado (a, b) pertenece a R si y sólo si tanto a como b pertenecen a $\{0, 1, 2, 3\}$ y $a \leq b$.

Ejemplo 21

¿Cuáles son los pares ordenados en la relación menor o igual a, que contiene (a, b) si $a \leq b$, sobre el conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$?

Solución:

- El par ordenado (a, b) pertenece a R si y sólo si tanto a como b pertenecen a $\{0, 1, 2, 3\}$ y $a \leq b$.
- En consecuencia,

$$R = \{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}.$$

□

1. Liste los miembros de estos conjuntos.
   1. $\{x|x$ es un número real tal que $x^2 = 1\}$,
   2. $\{x|x$ es un entero positivo menor que $12\}$,
   3. $\{x|x$ es el cuadrado de un entero y $x < 100\}$,
   4. $\{x|x$ es un entero tal que $x^2 = 2\}$.
2. Utilice la notación de constructor de conjuntos para dar una descripción de cada uno de estos conjuntos.
   1. $\{0, 3, 6, 9, 12\}$,
   2. $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,
   3. $\{m, n, o, p\}$.
3. Para cada uno de estos pares de conjuntos, determine si el primero es un subconjunto del segundo, el segundo es un subconjunto del primero, o ninguno es un subconjunto del otro.
   1. el conjunto de personas que hablan Inglés, el conjunto de personas que hablan Inglés con acento australiano.
   2. el conjunto de frutas, el conjunto de frutas cítricas.

3. el conjunto de estudiantes que estudian estructuras discretas, el conjunto de estudiantes que estudian estructuras de datos.

4. Suponga que $A = \{2, 4, 6\}, B = \{2, 6\}, C = \{4, 6\}$ y $D = \{4, 6, 8\}$. Determine cuáles de estos conjuntos son subconjuntos de alguno de los restantes conjuntos.
5. ¿Cuál es la cardinalidad de cada uno de estos conjuntos?
   1. $\emptyset$,
   2. $\{\emptyset\}$,
   3. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,
   4. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.
6. Encuentre el conjunto potencia de cada uno de estos conjuntos, en los que a y b son elementos distintos.
   1. $\{a\}$,
   2. $\{a, b\}$,
   3. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Ejercicios III

7. ¿Cuántos elementos tiene cada uno de estos conjuntos, donde a y b son elementos distintos?
   1. $\mathcal{P}(\{a, b, \{a, b\}\})$,
   2. $\mathcal{P}(\{\emptyset, a, \{a\}, \{\{a\}\}\})$,
   3. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.
8. ¿Cuál es el producto cartesiano $A \times B \times C$, donde A es el conjunto de todas las aerolíneas, B y C son ambos el conjunto de todas las ciudades de Estados Unidos? Dé un ejemplo de cómo se puede utilizar este producto cartesiano.
9. Sean $A = \{a, b, c\}, B = \{x, y\}$, y $C = \{0, 1\}$. Encuentre
   1. $A \times B \times C$,
   2. $C \times B \times A$,
   3. $C \times A \times B$,
   4. $B \times B \times B$.
10. Encuentre A^3 si
    1. $A = \{a\}$,
    2. $A = \{0, a\}$.